A 27. Hajós György Matematikaverseny feladatai

1. A pozitív $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számokra teljesül az $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ egyenlőtlenség minden $n = 1, 2, 3, \ldots$ esetén. Mutassuk meg, hogy $a_n < \frac{1}{n}$! (18 pont)

2. Legyenek a, b, c pozitív egész számok! Milyen a, b, c értékekre teljesül az

$$\left.\begin{aligned} x - ay - a^2 z &= a^3 \\ x - by - b^2 z &= b^3 \\ x - cy - c^2 z &= c^3 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer gyökeire, hogy $x + y + z = 2005$? (20 pont)

3. Adott az egységnyi élű $ABCDA'B'C'D'$ kocka. Legyen M a BB' és N a BC él felezőpontja.

(a) Határozza meg a DMN sík kockába eső metszetének területét!

(b) Határozza meg az $ABCD$ és DMN síkok lapszögének tangensét! (20 pont)

4. Határozzuk meg a, b, c értékét úgy, hogy az $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom $(x-1)$-gyel, $(x-2)$-vel, $(x-3)$-mal való osztás maradéka rendre 1, 2, 3 legyen! (20 pont)

5. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög a, b és c oldalhosszaira $a^2 + c^2 = 2b^2$ teljesül! Igazoljuk, hogy ekkor $\operatorname{ctg} \beta$ a másik két szög kotangensének számtani közepe!

(22 pont)

Jó munkát!

Dr. Obádovics J. Gyula	Horváth Péter	Dr. Klincsik Mihály
Kun Mária	Makó Margit	Dr. Molnár-Sáska Gáborné

Budapest, 2005. március 24.