

**XXI. HAJÓS GYÖRGY MATEMATIKAI VERSENY**  
**DUNAÚJVÁROS, 1999.**

**1. FELADAT**

Tizenhét dobozban piros, kék, sárga és zöld golyók vannak. Bizonyítsa be, hogy található két olyan doboz, amelyekben együttvéve mind a négy színű golyóból páros sok van!

(17 pont)

**2. FELADAT**

Legyenek az ABC háromszög A-ből és B-ből induló súlyvonalai egymásra merőlegesek! Mutassa meg, hogy ekkor a C csúcsnál levő  $\gamma$  szögre

$$\cos \gamma \geq \frac{4}{5}$$

teljesül!

(20 pont)

**3. FELADAT**

Adott egy  $2\varphi$  nagyságú szög ( $\varphi < 90^\circ$ ) a szárait érintő  $r_1$  sugarú körrel együtt. Képezzen egy, a fenti körrel kezdődő körsorozatot úgy, hogy  $(n+1)$ -edik kör érintse a szög szárait, az  $n$ -edik kört, és sugara legyen kisebb az  $n$ -edik kör sugaránál! Mekkora az így kapott körök sugarainak (végtelen) összege?

(20 pont)

**4. FELADAT**

Mi a legnagyobb és a legkisebb értéke az  $f(x) = \left(x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\right)e^{-x^2}$  függvénynek?

(20 pont)

**5. FELADAT**

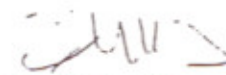
Határozza meg azokat a  $P(x)$  legalább elsőfokú polinomokat, amelyek minden valós  $x$  esetén kielégítik a  $P(x-2) + P(x+2) = 2P(x)$  és  $P(0) = 0$  összefüggéseket! Számítsa ki a


$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m P\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

határértéket!

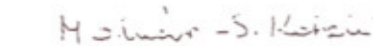
(23 pont)

Dunaújváros, 1999. április 9.

  
Dr. Zoller Vilmos  
elnök

  
Dr. György Anna

  
Mihályi István

  
Dr. Molnár-Sáska Katalin

  
Sárvári Csaba